$\pm$ Teoria dos Números

Setembro de 2024

L. Arjuna

Problema 1. O produto de alguns primos, não necessariamente distintos, é dez vezes maior que a sua soma. Quais são esses primos?

Problema 2. Ache todos os pares de inteiros a, b tais que $a+b$ é raiz da equação $x^2+ax+b=0$.

Problema 3. Os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfazem as seguintes condições:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1.$$

Prove que existem i, j tais que $x_ix_j \leq -\frac{1}{n}$.

Problema 4. (IMO) Prove que, para todo inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos, nenhum dos quais é uma potência de primo.

Problema 5. Seja $S=\{1,2,\ldots,n\}$. Mostre que é possível apagar dois ou menos elementos de S de modo que a soma dos elementos restantes seja um quadrado perfeito.

Problema 6. Mostre que a parte fracionária de $\sqrt{4n^2+n}$ não é maior que 0.25.

Problema 7. (IMO) Dado um número real $\alpha>1$, prove que existe uma sequência infinita limitada $x_0, x_1, x_2, \ldots$ tal que $|x_i-x_j||i-j|^\alpha \geq 1$ para todo par de naturais distintos i, j.

Problema 8. Existem 2005 pessoas em um senado e cada um possui inimigos no grupo. Prove que existe um subconjunto não vazio K de senadores tal que para cada senador o seu número de inimigos em K é par.

Problema 9. (OBM) Prove que existe um natural n tal que a expansão decimal de n^{1992} começa com 1992 algarismos iguais a 1.

Problema 10. (OBM) Sejam $c \in \mathbb{Q}$ e $f(x) \equiv x^2+c$. Definimos

$$f^0(x)=x, \quad f^{n+1}(x)=f^n(f(x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é pré-periódico se $\{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é finito. Prove que o número de racionais pré-periódicos é finito.