Teoria dos Números I

Março de 2024

L. Arjuna

Problema 1. Encontre todos os pares de números primos p, q tais que $p + q$ e $p - q$ também são primos.

Problema 2. Prove que $\mathrm{mdc}(F_n, F_{n+1}) = 1$ para todo natural n, onde F_n denota o $n-$ésimo elemento da Sequência de Fibonacci.

Problema 3. Nemo possui cinco inteiros positivos menores que 100 tais que quaisquer dois deles são primos entre si. Prove que um deles é primo.

Problema 4. (IMO) Mostre que a fração

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}$$

é irredutível para todo n natural.

Problema 5. Encontre uma sequência $(a_n)_n$ de inteiros positivos na qual cada inteiro positivo aparece exatamente uma vez e tal que a soma de dois elementos consecutivos quaisquer nunca é prima.

Problema 6. Mostre que o dígito das dezenas de uma potência de 3 é sempre par.

Problema 7. (OBM) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

Problema 8. Prove que

$$1 + 2^{2^n} + 3^{2^n} + 4^{2^n} + 5^{2^n}$$

é múltiplo de 11 para todo natural n.

Problema 9. (OCM) Seja $n > 2$ inteiro. É possível que n seja divisível por todos os números primos menores que n?

Problema 10. Demonstre que, para todo n natural ímpar,

$$2^{2n}(2^{2n+1} - 1)$$

termina em 28 quando escrito em notação decimal.

Problema 11. (OBM) Prove que existem infinitos números da forma $199\ldots991$ que são múltiplos de 1991.

Problema 12. Seja n um inteiro positivo. Considere o seguinte jogo: Nemo escreve n inteiros positivos distintos e Dory apaga alguns deles (possivelmente nenhum, mas não todos). Em seguida, Dory coloca sinais de $+$ ou $-$ antes dos números que restaram. Dory vence se o resultado final for múltiplo de 2024 e Nemo vence caso contrário. Para que valores de n Nemo possui uma estratégia vencedora?