NEMO

Séries I

Setembro de 2025

Arjuna

Problema 1. Sejam $(a_n), (b_n)$ sequências de reais. Demonstre que

$$\sum a_n^2 < \infty \text{ e } \sum b_n^2 < \infty \implies \sum a_n b_n < \infty.$$

Problema 2. Sejam $(a_n), (b_n)$ sequências de reais positivos tais que $\lim \frac{a_n}{b_n}$ existe e é positivo. Demonstre que

$$\sum a_n < \infty \iff \sum b_n < \infty$$

Problema 3. (Putnam) A sequência $a_1, a_2, \dots$ satisfaz $0 < a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$. Mostre que $\sum a_n$ diverge.

Problema 4. Seja $(a_n)_n$ uma sequência de reais positivos. Mostre que

$$\sum a_n < \infty \iff \sum \frac{a_n}{1 + a_n} < \infty$$

Problema 5. Seja $(a_n)_n$ uma sequência decrescente tal que $\sum a_n < \infty$. Mostre que $\lim n a_n = 0$.

Problema 6. Seja $(a_n)_n$ uma sequência decrescente de reais positivos e $x \in \mathbb{R}$. Mostre que, se $\lim n a_n = 0$, então

$$\sum a_n \sin(nx) < \infty$$

Problema 7. Seja $(a_n)_n$ uma sequência de reais positivos. Mostre que

$$\sum a_n < \infty \implies \sum \frac{1}{n^2 a_n} = \infty$$

Problema 8. Seja $x \in (0, 1)$. Calcule o produto

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n})$$

Problema 9. Seja (a_n) uma sequência de reais positivos. Mostre que

$$\sum a_n < \infty \iff \sum \left(a_n \Big/ \sum_{k=0}^{n} a_k \right) < \infty$$

Problema 10. (OBM) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sucessão de números reais tal que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$

Problema 11. (OBM) Se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência decrescente de termos positivos tal que $\sum a_n = +\infty$, então mostre que existe uma sequência decrescente de termos positivos $(b_n)_{n \geq 1}$ com $b_n \leq a_n$ para todo n, $\sum b_n = +\infty$ e $\lim(n b_n) = 0$.