NEMO

Sequências e Séries na OBMU

Agosto de 2024

Gabriel Franceschi Libardi

Teorema (Teorema do Ponto Fixo para Contrações). *Seja* $I = [a, b]$ *um intervalo fechado e* $f : I \to I$ *uma contração, ou seja, existe uma constante* $0 < \kappa < 1$ *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \kappa|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

Então, existe um único ponto $c \in I$ *tal que* $f(c) = c$*. Além disso, toda sequência* $(x_n)_{n\geq 0}$ *em* I*, com* $x_{n+1} = f(x_n)$ *para todo* $n \geq 0$ *e valor inicial* x_0 *arbitrário, converge para* c*.*

Teorema (Estimativa de Séries por Integrais). *Seja* $(a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência, e suponha que a função* $f(x)$ *seja positiva, decrescente, e tal que* $f(n) = a_n$ *para todo* $n \geq 0$*. Então, a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *pode ser estimada por integrais:*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq a_0 + \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Estas desigualdades fornecem uma estimativa para o valor da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e um critério de convergência.*

Dica valiosa: when in doubt, estime! Say it with me: bound, estime e cote! Pelo seguinte motivo:

Teorema (Teorema da Convergência Monótona). *Seja* $(a_n)_{n\geq 0}$ *uma sequência crescente de números reais que possui majorante, ou seja, existe um número real* M *tal que* $a_n \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Então, a sequência* $(a_n)_{n\geq 0}$ *é convergente, e seu limite é dado por:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Problema 1. (OBMU - 1ª fase) Considere a sequência $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$, para $n \geq 1$.

a) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Determine $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n(2-a_n)}{n+1}\right)^{n+1}$.

Problema 2. (OBMU - 1ª fase) Seja x_n uma seqüência de números reais definida por

$$x_{n+1} = x_n^2 - \frac{x_n}{2}, \quad n \geq 0.$$

Para quais valores de x_0 a seqüência converge? Para que valor?

Problema 3. (OBMU - 1ª fase) Seja

$$P = \left\{a^b \mid a, b \in \mathbb{Z}, a, b > 1\right\} = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, \ldots\}$$

o conjunto das potências perfeitas. Prove que a soma infinita

$$\sum_{m\in P} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \cdots$$

é igual a 1 .

Problema 4. (OBMU - 2ª fase 2008) Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \frac{x^{2008}}{2008} + x^2 - nx$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e seja m_n o valor mínimo assumido por f_n. Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que o limite $\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n^\alpha}$ existe e é não-nulo, e calcule esse limite (para esse valor de α).

Problema 5. (OBMU - 2ª fase) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sucessão de números reais tal que $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

Problema 6. (OBMU - 2ª fase 2017) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de termos (estritamente) positivos com $\lim a_n = 0$ tal que, para um certo $c > 0$ e para todo $n \geq 1$, temos $|a_{n+1} - a_n| \leq c \cdot a_n^2$. Prove que existe $d > 0$ com $n \cdot a_n \geq d$, $\forall n \geq 1$.

Problema 7. (OBMU - fase única 2021) Para cada inteiro $n > 1$ seja $k(n)$ o maior inteiro positivo k tal que $n = m^k$ para algum inteiro positivo m. Determine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n+1} k(j).$$

Problema 8. (OBMU - fase única 2020) Para $R > 0$ inteiro, denote por $n(R)$ a quantidade de triplas $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tais que $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 = R$. Determine o valor de

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{n(1) + n(2) + \ldots + n(R)}{R^{3/2}}.$$

Problema 9. (OBMU - fase única 2022) Dado $0 < a < 1$, determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas em $x = 0$ tais que $f(x) + f(ax) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 10. (OBMU - fase única 2022) Dados $c, \alpha > 0$, considere a sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ definida por $x_1 = c$ e $x_{n+1} = x_n e^{-x_n^\alpha}$ para $n \geq 1$. Para quais valores reais de β a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^\beta$ é convergente?

Problema 11. (OBMU - fase única 2023) Seja p a função *potencioral*, dos inteiros positivos nos inteiros positivos, definida por $p(1) = 1$ e $p(n+1) = p(n)$, se $n+1$ não é uma potência perfeita, e $p(n+1) = (n+1) \cdot p(n)$, caso contrário. Existe N inteiro positivo tal que, para todo $n > N$, $p(n) > 2^n$?

Obs.: Um inteiro n é uma *potência perfeita* se existem inteiros $a, b \geq 2$ tais que $n = a^b$.