NEMO

Recorrências e Combinatória

Maio de 2024

Gabriel Franceschi Libardi

Queremos encontrar o termo geral de sequências da forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, para a qual dois termos da sequência são dados - note que isso basta para determinar uma sequência única de números.

Proposição. *(Recorrências lineares de segunda ordem). Dada uma recorrência da forma $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, dizemos que a sua equação característica é $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, pois o termo geral é dado em função das raízes desta equação. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o termo da sequência é dado por:*

$$a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n.$$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, o termo geral é dado por:

$$a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta n\lambda_1^n.$$

você consegue ver a generalização deste fato para recorrências de ordem k?

Frequentemente, problemas de contagem podem ser resolvidos solucionando os primeiros casos (a base) e encontrando uma recorrência para os demais casos.

Problema 1. De quantas maneiras podemos preencher uma caixa $2 \times n$ com dominós 2×1?

Problema 2. (AMT) A sequêcia $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_1 = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}).$$

Prove que a_{2018} é divisível por 2018^2.

Problema 3. Dado um triângulo, de quantas maneiras uma formiga pode partir de um dos seus vértices e, caminhando pelas suas arestas, retornar ao vértice inicial após passar por exatamente n arestas?

Problema 4. Dizemos que um conjunto de inteiros é *espaçado* se contém no máximo um de cada três inteiros consecutivos. Quantos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ são espaçados?

Problema 5. Suponha que Nemo joga uma moeda várias vezes e marca um ponto para cara e dois pontos para coroa. Dado $n \geq 1$ natural, qual a probabilidade de Nemo marcar exatamente n pontos em algum momento?

Problema 6. (IMC) Seja n um inteiro positivo. Compute o número de palavras w (sequências finitas de letras) que satisfazem todas as três seguintes propriedades:

(a) w consiste de n letras, todas pertencentes ao alfabeto $\{a, b, c, d\}$;

(b) w contém um número par de letras a;

(c) w contém um número par de letras b;

(Por exemplo, para $n = 2$ existem 6 tais palavras: aa, bb, cc, dd, cd e dc.)

Problema 7. A sequência (a_n) é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{1}{16}(1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n})$ para $n \geq 1$. Determine a_n em função de n.

Problema 8. (Putnam) Prove que existe uma única função f do conjunto $\mathbb{R}^+$ de reais positivos no conjunto $\mathbb{R}^+$ tal que

$$f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Dica: Defina $a_n = f(a_{n-1})$.

Problema 9. (Elon Lages) Considera uma sequência a_n definida por $a_1 = 2$, e para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = (a_n)^2 + 6a_n + 6$. Determine o resto de a_{100} na divisão por 7.

Problema 10. (Elon Lages) Considere a sequência a_n definida por $a_1 = 337$ e, para todo $n > 1$,

$$a_n = \frac{n^2}{n^2 + n - 2}a_{n-1}.$$

Determine $\lim_{n\to\infty}(2020 + n)a_n$.

Problema 11. (Elon Lages) 2022 dados são lançados simultaneamente (neste problema, não faltam dados!). Qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja um múltiplo de 5?

Problema 12. (Elon Lages) Com as letras **E, L, O, N** vamos formar sequências de 2023 letras de modo que não hajam duas letras **E** consecutivas. Qual é a quantidade dessas sequências?

Problema 13. (Elon Lages) Coonsidere duas moedas A e B tais que a probabilidade de sair cara na moeda A é $\frac{1}{4}$, enquanto na moeda B é $\frac{1}{2}$. Escolhe-se alguma dessas moedas ao acaso e a arremessa. Se sair cara, essa moeda é arremessada novamente, caso contrário é arremessada a outra moeda. Para cada inteiro positivo n, seja p_n a probabilidade da moeda lançada no n-ésimo arremesso seja a moeda A. Encontre p_n em função de n.