Invariantes I

Março de 2024

L. Arjuna

Problema 1. Seja n um inteiro positivo ímpar. Inicialmente os números $1, 2, \ldots, 2n$ estão escritos em um quadro negro. Nemo escolhe dois números a e b, os apaga e escreve em seu lugar o número $a-b$. Ele repete o processo até que haja um único número no quadro. Prove que esse número é ímpar.

Problema 2. 2024 sapos se encontram nos 2024 degraus de uma escadaria, um em cada degrau. A cada instante, algum sapo sobe um degrau e algum outro sapo desce um degrau. É possível que, em algum momento, todos os sapos se encontrem no mesmo degrau?

Problema 3. Dois cantos opostos de um tabuleiro de xadrez 8×8 são removidos. É possível cobrir o restante do tabuleiro com peças de dominó 1×2?

Problema 4. As células de uma tabela $m \times n$ estão preenchidas com números de modo que a soma dos números em cada linha e em cada coluna seja igual. Prove que $m = n$.

Problema 5. Dada uma palavra formada pelas letras X e O, nós podemos realizar qualquer uma das seguintes operações:

- se há um XO, nós podemos apagá-lo;
- logo após um X, nós podemos adicionar um XO;
- podemos adicionar um XOOXOX em qualquer lugar.

É possível converter OOX em XXO através de uma série de tais operações?

Problema 6. Uma operação consiste em trocar três números x, y, z pelos três números $\frac{x+y}{2}, \frac{y+z}{2}, \frac{z+x}{2}$. Prove que, se iniciarmos com três inteiros distintos e realizarmos a operação um número suficiente de vezes, em algum momento obteremos um resultado não inteiro.

Problema 7. Considere a sequência $(a_n)_n$ dada por $a_0 = 2025^{2024^{2023}}$ e $a_{n+1} = s(a_n)$, $n \geq 0$, onde $s(x)$ denota a soma dos dígitos do número x. Determine o valor de a_{2024}.

Problema 8. (Putnam) Em um tabuleiro $n \times n$ existem n^2 casas, $n-1$ das quais estão infectadas. A cada segundo, qualquer casa adjacente a pelo menos duas casas infectadas se torna infectada. Prove que pelo menos uma casa nunca será infectada.

Problema 9. Nas reuniões do NEMO, cada participante tem no máximo 3 inimigos. Mostre que os participantes da reunião podem ser divididos em duas salas de modo que cada pessoa dentro de uma sala tenha no máximo um inimigo dentro da sua própria sala.
Nota: se A é inimigo de B, então B é inimigo de A.

Problema 10. Considere um conjunto de $2n$ pontos em posição geral no plano, n azuis e n vermelhos. Mostre que é possível formar pares, cada par contendo um ponto azul e um ponto vermelho, e conectar cada par por um segmento de modo que os segmentos não se cruzem.

Problema 11. Sete copos estão em uma mesa – todos de cabeça para baixo. É permitido virar quaisquer 4 deles em um movimento. É possível chegar a uma situação onde todos os copos estão virados para cima?

Problema 12. Em um tabuleiro 3×3 uma casa em um canto é preta e as demais são brancas. Prove que não é possível tornar todas as casas brancas recolorindo linhas e colunas do tabuleiro, onde "recolorir" consiste em trocar as cores de todas as casas.