Indução I

Março de 2024

L. Arjuna

Princípio da Indução. Dada uma afirmação p tal que

- $p(0)$ é verdade;
- $p(n)$ implica em $p(n+1)$;

temos p verdadeira para todos os naturais.

Princípio da Indução Forte. Dada uma afirmação p tal que

- $p(0)$ é verdade;
- $p(0), p(1), \ldots, p(n)$ implicam em $p(n+1)$;

temos p verdadeira para todos os naturais.

Problema 1. Mostre que

(a) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$

(b) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$

Problema 2. Mostre que

$$3^n+4^n<5^n$$

para todo $n>2$ natural.

Problema 3. Você possui uma coleção de 3^n moedas e uma balança de pratos. Todas as moedas exceto uma são genuínas e uma delas pesa mais que as demais. Prove que é sempre possível encontrar a moeda falsa fazendo somente n pesagens com a balança.

Problema 4. Prove que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ é múltiplo de 9 para todo n natural.

Problema 5.

(a) Seja x tal que $x+\dfrac{1}{x}$ é inteiro. Prove que

$$x^n+\frac{1}{x^n}$$

é inteiro para todo n natural.

(b) Prove que $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ é inteiro para todo n natural.

Problema 6. Mostre que

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\geq\frac{n\sqrt{n}+1}{2}$$

Problema 7. Mostre que

$$3^{3^n}+1$$

é múltiplo de 7 para todo n inteiro positivo.

Problema 8. Um país possui n cidades. Quaisquer duas cidades estão conectadas por uma estrada de sentido único. Mostre que existe uma rota passando por todas as cidades.

Problema 9. Nemo possui uma barra de chocolate de dimensões $m\times n$ dividida em mn pedacinhos menores por linhas verticais e horizontais. Ele deseja partir a barra ao longo das linhas até que cada um dos mn pedacinhos esteja destacado. Quantas vezes Nemo partiu a barra?

Problema 10. Prove que

$$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$$

para todo n natural, onde F_n denota o $n-$ésimo elemento da Sequência de Fibonacci.

Problema 11. Você possui um tabuleiro de xadrez $2^n\times 2^n$ com exatamente uma casa faltando. Prove que você pode cobrir o restante do tabuleiro com $L-$triminós sem sobreposições.

Problema 12. Em uma rodovia circular de mão única estão distribuídos n postos de gasolina. Sabe-se que a soma da quantidade de gasolina em cada posto é suficiente para um carro dar uma volta completa na rodovia. Mostre que é possível escolher um dos n postos de modo que um carro sem gasolina consegue dar uma volta completa na rodovia a partir desse posto. Considere que sempre que o carro chega em um posto, ele enche o tanque com toda a gasolina disponível.

Problema 13. Seja $a_1=2024$. Prove que existe uma sequência crescente $(a_n)_n$ de números naturais tais que

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \mid a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

para todo natural n.