# Álgebra Linear II

Outubro de 2025

Arjuna

**Definição.** Uma matriz quadrada $X$ é dita **nilpotente** se existe $m$ natural com $X^m = 0$.

**Teorema.** *Seja $X$ uma matriz $n \times n$. São equivalentes*

- $X$ *é nilpotente;*
- *todo autovalor de $X$ é $0$;*
- $\operatorname{tr}(X^m) = 0$ *para todo $m \leq n$;*
- $\operatorname{tr}(X^m) = 0$ *para todo $m$ natural.*

---

**Problema 1.** Se $X$ é uma matriz nilpotente $n \times n$, mostre que $X^n = 0$.

**Problema 2.** Seja $A$ uma matriz real $n \times n$ com entradas não negativas tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo $i$. Mostre que nenhum autovalor de $A$ tem módulo maior que 1.

**Problema 3.** Sejam $A, B$ matrizes quadradas tais que $2A(B - A) = A + B$. Prove que $AB = BA$.

**Problema 4.** Sejam $A, B$ matrizes quadradas tais que

$$A^2B + AB^2 = 2AB.$$

Prove que $AB - BA$ é nilpotente.

**Problema 5.** (México) Sejam $A, B$ matrizes reais $2019 \times 2019$ invertíveis. Mostre que existem reais não nulos $\alpha, \beta$ tais que a matriz $M = \alpha A + \beta B$ não é invertível.

**Problema 6.** Seja $A$ matriz $2 \times 2$ com coordenadas inteiras e suponha que existe $n$ com $A^n = I$. Mostre que $\operatorname{tr}(A) \leq n$.

**Problema 7.** (CIIM 2016) Seja $N_s$ o conjunto das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

nilpotentes com entradas inteiras tal que $a = s$. Encontre todos os inteiros $s$ tais que $N_s$ é infinito.

**Problema 8.** Sejam $A, B$ matrizes reais $n \times n$ tais que $A^2 + B^2 = AB$ e $AB - BA$ é invertível. Prove que $n$ é múltiplo de 3.

**Problema 9.** (IMC 2022) Seja $n$ um inteiro positivo. Encontre todas as matrizes reais $n \times n$ com autovalores reais que satisfazem

$$A + A^k = A^T$$

para algum inteiro $k \geq n$.

**Problema 10.** (IMC 2011) Existe uma matriz real $3 \times 3$ $A$ tal que $A^2 + A^T = I$?