



Álgebra Linear na CELL

Maio de 2024

L. Arjuna

Problema 1. Considere a tabela

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 10 \\ 11 & 12 & \dots & 20 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 91 & 92 & \dots & 100 \end{bmatrix}$$

Se escolhermos 10 elementos da tabela de modo que não hajam dois na mesma linha ou coluna, qual será a soma desses elementos?

Problema 2. Prove que

$$\det \begin{pmatrix} \sin 1 & \sin 2 & \sin 3 \\ \sin 4 & \sin 5 & \sin 6 \\ \sin 7 & \sin 8 & \sin 9 \end{pmatrix} = 0$$

Problema 3. Para n natural, defina

$$A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$$

Para que valores de n temos c_n múltiplo de 7?

Problema 4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Qual o menor inteiro positivo n tal que $A^n \equiv A \pmod{11}$? A congruência é tomada entrada à entrada.

Problema 5. Seja \mathbb{B} o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ com entradas iguais a 1 ou -1. Determine o valor de

$$S = \sum_{A \in \mathbb{B}} \det A.$$

Problema 6. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ 2024×2024 dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j, \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o valor de $\det A$.

Problema 7. Considere a matriz

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine o valor de

$$I + T + T^2 + T^3 + \dots + T^{2022}.$$

Problema 8. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (3x - 2y, x - 2y)$$

Seja $f(\mathbb{Z}^2)$ a imagem de \mathbb{Z}^2 por f e denote por q_N o tamanho do conjunto $\{(x, y) \in f(\mathbb{Z}^2) : -N < x, y < N\}$. Calcule o limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q_N}{N^2}.$$

Problema 9. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - 4y, 4x + 3y)$. Seja T^k a composição de T k vezes e seja a_n a quantidade de inteiros k entre 1, 2, ..., n tais que o vetor $T^k(2021, 2022)$ pertença ao primeiro quadrante. Determine o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}.$$

Problema 10. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ 2022×2022 dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{3}, & \text{se } i = j, \\ 1, & \text{se } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o valor de $\det A$.

Problema 11. Sejam A, B matrizes 2×2 . Mostre que

$$(AB - BA)^2 = -\det(AB - BA)I.$$